

# Контроль магнитным полем субизлучательных состояний системы двух атомов

А. А. Макаров<sup>+\*1)</sup>, В. И. Юдсон<sup>×°</sup>

<sup>+</sup>Институт спектроскопии РАН, 108840 Троицк, Москва, Россия

<sup>\*</sup>Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

<sup>×</sup>Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия

<sup>°</sup>Российский квантовый центр, 143025 Сколково, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

Предлагается метод создания запутанного метастабильного (субизлучательного) возбужденного состояния в системе двух близко расположенных одинаковых атомов. Вначале система невозбужденных атомов помещается в магнитное поле, направленное под магическим углом  $\alpha_0 = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7^\circ$  к линии, соединяющей атомы, и имеющее градиент в поперечном направлении. Градиент поля приводит к расстройке частот оптического перехода атомов. Далее производится резонансное лазерное возбуждение атома с большей частотой перехода и последующее адиабатическое выключение градиента магнитного поля. Показано, что при этом возбужденная атомная система с подавляющей вероятностью переходит в запутанное субизлучательное состояние. Анализируются необходимые для реализации этого эффекта требования к спектроскопическим параметрам переходов и скорости изменения градиента магнитного поля.

DOI: 10.7868/S0370274X17030122

Система двух одинаковых атомов с основным  $|g\rangle$  и возбужденным  $|e\rangle$  состояниями – модель, демонстрирующая эффекты сверх- и субизлучения Дикке (Dicke) [1]. Однократно возбужденные состояния системы являются суперпозициями состояний  $|\mathcal{Q}_1\rangle = |e_1g_2\rangle$  и  $|\mathcal{Q}_2\rangle = |g_1e_2\rangle$ . При этом симметричное состояние  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{Q}_1\rangle + |\mathcal{Q}_2\rangle)$  является сверхизлучающим, распадающимся в два раза быстрее, чем одноатомное состояние  $|e\rangle$ , а антисимметричное состояние  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{Q}_1\rangle - |\mathcal{Q}_2\rangle)$  является субизлучающим, распадающимся относительно медленно по параметру  $(r/\lambda_{eg})^2$ , если расстояние  $r$  между атомами значительно меньше длины волны  $\lambda_{eg}$  излучения на переходе  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ . Межатомное диполь-дипольное взаимодействие снимает вырождение между этими состояниями, которые в современной литературе называются запутанными [2, 3].

Такая минимальная модель теоретически изучалась (с акцентом на сверхизлучение) в ряде работ (см., например, [4–6] и обзор [3]). Что же касается субизлучательных состояний, то они привлекают особое внимание в связи с потенциальной способностью хранить квантовую информацию на относительно больших временных промежутках. Ярко вы-

раженный эффект субизлучения может быть достигнут в одномерном случае (1D-одномодовый волновод или фотонный кристалл), когда два атома расположены на расстоянии целого или полуцелого числа длин волн оптического перехода,  $r = n\lambda_{eg}/2$  [7, 8]. Рассматривалось несколько методов формирования субизлучательного состояния. Например, в упомянутой 1D-конфигурации субизлучающее состояние образуется с вероятностью  $\approx 1/2$ , если в начальный момент времени возбужден один из атомов. Однако эта схема может быть реализована только для пространственно удаленных атомов. Для 3D-случая двух близко расположенных атомов ( $r \ll \lambda_{eg}$ ) в [9] была рассмотрена схема, использующая лазерные импульсы специальной формы. Интересная (хотя весьма сложная) схема для конструирования одноквантового субизлучательного состояния в ансамбле большого числа атомов была недавно рассмотрена в [10]. Что касается эксперимента, то некоторые свидетельства в пользу изменения скорости спонтанного распада были получены, например, в [11] для ансамбля из большого числа атомов и в [12] для системы двух ионов в ловушке. Наконец, совсем недавно с достоверностью наблюдалось субизлучение от облака холодных атомов [13]. Вклад этого эффекта был малым, но детектируемым по узкому спектру

<sup>1)</sup>e-mail: amakarov@isan.troitsk.ru

флуоресценции, задержанной на времена, значительно превышающие время сверхизлучения.

В данной статье рассматривается схема создания (с использованием магнитного поля) субизлучательного состояния в системе двух одинаковых, близко расположенных атомов  $A_1$  и  $A_2$ . Для определенности предполагаем, что в основном атомном состоянии  $|g\rangle$  полный угловой момент  $J = 0$ , а в возбужденном  $|e\rangle$  имеем  $J = 1$ . Тогда однократно возбужденные состояния системы являются в общем случае суперпозициями шести состояний:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1^{(-1)} &= |e_1^{(-1)} g_2\rangle, \quad \mathcal{Q}_1^{(0)} = |e_1^{(0)} g_2\rangle, \quad \mathcal{Q}_1^{(+1)} = |e_1^{(+1)} g_2\rangle, \\ \mathcal{Q}_2^{(-1)} &= |g_1 e_2^{(-1)}\rangle, \quad \mathcal{Q}_2^{(0)} = |g_1 e_2^{(0)}\rangle, \quad \mathcal{Q}_2^{(+1)} = |g_1 e_2^{(+1)}\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где верхний индекс означает проекцию  $M$  углового момента на ось квантования  $z$ . Оператор межатомного диполь-дипольного взаимодействия может быть представлен в виде, явно зависящем от угла  $\alpha$  между осью квантования  $z$  и линией, соединяющей атомы (рис. 1b):

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \frac{(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2)}{r^3} - 3 \frac{(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \mathbf{r})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} = \\ &= -\frac{1}{2r^3} \left\{ \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \left( \tilde{d}_1^{(+)} \tilde{d}_2^{(+)} + \tilde{d}_1^{(-)} \tilde{d}_2^{(-)} \right) + \right. \\ &+ \left( \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right) \left( \tilde{d}_1^{(+)} \tilde{d}_2^{(-)} + \tilde{d}_1^{(-)} \tilde{d}_2^{(+)} \right) + \\ &+ 2 \left( 3 \cos^2 \alpha - 1 \right) \tilde{d}_1^{(z)} \tilde{d}_2^{(z)} + \\ &+ \left. \frac{3}{2} \sin 2\alpha \left[ \left( \tilde{d}_1^{(+)} + \tilde{d}_1^{(-)} \right) \tilde{d}_2^{(z)} + \tilde{d}_1^{(z)} \left( \tilde{d}_2^{(+)} + \tilde{d}_2^{(-)} \right) \right] \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\tilde{d}^{(\pm)} = \tilde{d}^{(x)} \pm i\tilde{d}^{(y)}$ . Удобно выразить матричные элементы оператора  $\hat{U}$  через скорость  $\Gamma$  спонтанного распада одиночного атома

$$\Gamma = \frac{32\pi^3}{3\hbar\lambda_{eg}^3} \left| \langle e^{(0)} | \tilde{d}^{(z)} | g \rangle \right|^2 \quad (3)$$

и параметр  $kr$ , где  $k = 2\pi/\lambda_{eg}$ . Следуя стандартным соотношениям для матричных элементов векторов [14] и вводя обозначения

$$\left\langle \mathcal{Q}_1^{(M)} \left| \hat{U} \right| \mathcal{Q}_2^{(M')} \right\rangle = U_r \beta_{MM'}, \quad U_r = \frac{3\Gamma}{4(kr)^3}, \quad (4)$$

получаем

$$\begin{aligned} \beta_{-1,-1} = \beta_{+1,+1} &= 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha, \quad \beta_{00} = 1 - 3 \cos^2 \alpha, \\ -\beta_{-1,0} = -\beta_{0,-1} &= \beta_{0,+1} = \beta_{+1,0} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin 2\alpha, \quad (5) \\ \beta_{-1,+1} = \beta_{+1,-1} &= \frac{3}{2} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

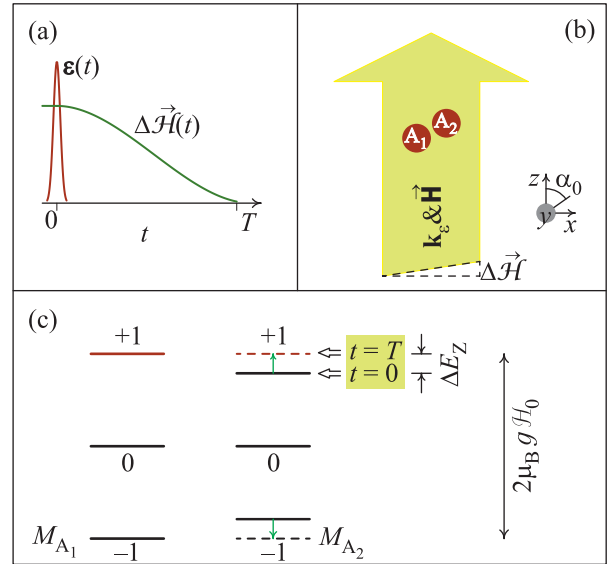


Рис. 1. (Цветной онлайн) К формированию субизлучательного состояния. В начальный момент времени включено магнитное поле с градиентом в поперечном направлении. (a) – Короткий лазерный импульс возбуждает подуровень  $M = +1$  атома  $A_1$ , затем градиент магнитного поля выключается с приближенным соблюдением адиабатического режима. (b) – Магнитное поле и лазерный импульс (с круговой поляризацией) направлены вдоль оси  $z$ . Атомы расположены в плоскости  $xz$ , линия, их соединяющая, направлена под углом  $\alpha_0$  к оси  $z$ . (c) – Первоначально возбужден атом с большей частотой перехода; при выключении  $\Delta\mathcal{H}$  происходит пересечение уровней атомов и формируется антисимметричное запутанное состояние

Наиболее простой вид матрица  $\|\beta\|$  имеет для магического угла  $\alpha = \alpha_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$  – в этом случае обнуляются матричные элементы  $\beta_{MM}$  (первая строка в (5)), а остальные равны  $\pm 1$ . Далее это свойство используется в наших целях.

Предлагаемый в письме сценарий формирования субизлучательного состояния представлен в подписи к рис. 1. Он основан на структуре возбужденных собственных состояний системы двух атомов в приложенном вдоль оси  $z$  сильном магнитном поле  $\mathcal{H}$  при выборе  $\alpha = \alpha_0$  (см. рис. 1b). Если  $E_Z = \mu_B g \mathcal{H} \gg U_r$  ( $E_Z$  – зеемановское расщепление,  $\mu_B$  – магнетон Бора,  $g$  – фактор Ланде), то (см. рис. 2а, где показаны результаты соответствующего расчета, а также работу [15]):

(i) собственные состояния, симметричные и антисимметричные по перестановке атомов, образуют по три уровня, с хорошо определенным квантовым числом  $M$ , т.е. практически сводятся к состояниям  $|\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\mathcal{Q}_1^{(M)}\rangle \pm |\mathcal{Q}_2^{(M)}\rangle \right)$ ;

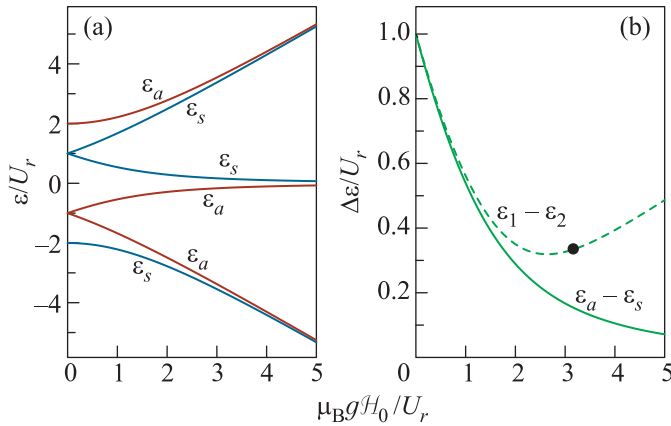


Рис. 2. (Цветной онлайн) Энергии собственных состояний системы двух атомов в зависимости от напряженности магнитного поля, приложенного под магическим углом (см. рис. 1b). (a) – Градиент магнитного поля равен нулю. (b) – Сплошная кривая представляет разность энергий двух верхних уровней на рис. 2a. Штриховая кривая также показывает разность энергий двух верхних уровней, но в присутствии поперечного градиента магнитного поля  $\Delta\mathcal{H} = -0.1\mathcal{H}_0$ . (Это соотношение, а также точка, отмеченная на кривой, задают значения соответствующих параметров, выбранных для финального численного расчета, – см. рис. 3 и сопутствующий текст)

(ii) энергии уровней во втором порядке теории возмущений по параметру  $U_r/E_Z$  даются следующими формулами:

$$\epsilon_{s,a}^{(0)} \approx \pm \frac{2U_r^3}{E_Z^2}, \quad \epsilon_{s,a}^{(M)} \approx M \left( E_Z + \frac{3U_r^2}{2E_Z} \right) \mp \frac{U_r^3}{E_Z^2}, \quad (6)$$

где во второй формуле  $M = \pm 1$ , и для которой величину

$$U_r^3/E_Z^2 = V_{\text{rsd}} \quad (7)$$

уместно рассматривать как *эффективный* недиагональный матричный элемент *остаточного* диполь-дипольного взаимодействия, осуществляющего расщепление пары состояний  $|\mathcal{Q}_{1,2}^{(M)}\rangle$  на  $|\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle$ .

Далее, как показано на рис. 1с, нас интересует пара верхних состояний<sup>2)</sup> (с  $M = 1$ ), и в начальный момент процедуры присутствует градиент  $\Delta\mathcal{H}$  магнитного поля в поперечном направлении, такой, что разность зеемановских сдвигов (см. рис. 2b) удовлетворяет неравенствам

$$\Delta E_Z \gg \frac{U_r^3}{E_Z^2}, \quad \Delta E_Z \gg \Gamma. \quad (8)$$

Благодаря первому из неравенств (8), становится принципиально возможным *селективно возбудить*

<sup>2)</sup> Также возможно использование пары нижних состояний с  $M = -1$ .

один из атомов, а, благодаря второму из неравенств (8), сделать это возможно за время  $\tau_\epsilon$ , значительно короче времени спонтанного распада. Подчеркнем: чтобы при адиабатическом выключении  $\Delta\mathcal{H}$  система переходила в антисимметричное состояние, возбуждать нужно *верхний* уровень, т.е. в данном случае  $M = 1$  атома с *большим* зеемановским сдвигом; следует это требование из взаимного расположения  $\epsilon_a$  и  $\epsilon_s$  для  $M = 1$  на рис. 2a.

Далее необходимо ответить на два вопроса, относящиеся к процессу выключения градиента магнитного поля:

(I) каким должно быть соотношение между скоростью уменьшения  $\Delta\mathcal{H}$  и величиной  $V_{\text{rsd}}$  (7), характеризующей *остаточное* диполь-дипольное взаимодействие?

(II) насколько может быть обеспечена малость полного времени  $T$  изменения  $\Delta\mathcal{H}$  по сравнению с временем спонтанного распада  $\Gamma^{-1}$ ?

Соответствующие оценки можно получить аналитически в рамках двухуровневой модели (в нашем случае  $|\mathcal{Q}_1^{(+1)}\rangle$  и  $|\mathcal{Q}_2^{(+1)}\rangle$ ), в которой расстояние между уровнями зависит от времени. Амплитуды вероятности для двух уровней модели обозначаем как  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  соответственно. Из временного уравнения Шредингера с гамильтонианом  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U} + \mu\mathcal{H}(t)$  имеем систему уравнений

$$\frac{da_1}{dt} = -iV_{\text{rsd}}a_2, \quad \frac{da_2}{dt} = -i\epsilon(t)a_2 - iV_{\text{rsd}}a_1, \quad (9)$$

где зависящая от времени разность энергий есть  $\epsilon(t) = \mu_B g \Delta\mathcal{H}$ . Для предварительной оценки воспользуемся решением системы (9), которое может быть получено аналитически в случае линейной по времени зависимости  $\epsilon(t) = \kappa t$  [16]. Из этого решения следует, что при выполнении неравенства

$$\mathcal{N}_{\text{ad}} = \frac{V_{\text{rsd}}^2}{\kappa} \gg 1 \quad (10)$$

вероятность неадиабатического перехода при изменении  $\epsilon$  до пересечения уровней оценивается, как  $\sim \exp(-\pi\mathcal{N}_{\text{ad}})$ . Отсюда следует ответ на вопрос (I). Что касается положительного ответа на вопрос (II), то требуется выполнение неравенства

$$\frac{\Gamma \Delta E_Z}{\kappa} \ll 1, \quad (11)$$

эквивалентного  $\Gamma T \ll 1$ , где  $T = \Delta E_Z/\kappa$  – время изменения магнитного поля. Чтобы одновременно удовлетворить условиям (10) и (11), должно с запасом выполняться неравенство

$$V_{\text{rsd}}^2 \gg \Gamma \Delta E_Z \quad (12)$$

и, поскольку по смыслу задачи  $\Gamma \ll V_{\text{rsd}} \ll \Delta E_Z$ , ясно, что предлагаемый сценарий может быть, в принципе, осуществлен только в ситуации, когда скорость спонтанного распада на несколько порядков меньше величины  $\Delta E_Z$ . Рис. 3 демонстрирует возможность одновременного выполнения перечисленных условий

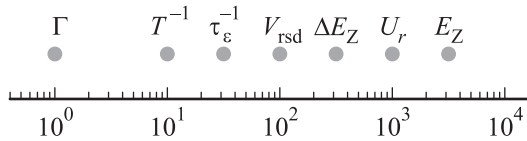


Рис. 3. Иллюстрация к выбору параметров задачи (все в единицах  $\Gamma$ ). Этот выбор позволяет удовлетворить сформулированным в тексте условиям. Видно, например, что при  $\sqrt{\Delta E_Z/T} \lesssim V_{\text{rsd}} \lesssim \Delta E_Z$  параметр адиабатичности  $\mathcal{N}_{\text{ad}} = V_{\text{rsd}}^2 T / \Delta E_Z$  больше единицы. Также отметим, что соотношение между  $U_r$  и  $\Gamma$  обусловлено значением расстояния между атомами; так, в приведенной шкале  $kr \sim 0.1$ , а для больших расстояний шкала должна быть сжата, чтобы обеспечить приемлемое значение  $\mathcal{N}_{\text{ad}}$

(8), (10)–(12), но можно видеть, что рамки допустимых взаимных изменений параметров ограничены.

Численный расчет позволяет оценить, насколько вероятность образования субблиздательного состояния может быть близка к единице. Форма возбуждающего лазерного импульса взята гауссовой

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{4t^2}{\tau_\epsilon^2}\right) \cos \omega t \quad (13)$$

с оптимальным значением амплитуды  $\mathcal{E}_0$  электрической компоненты (близость к  $\pi$ -импульсу). Частота излучения  $\omega$  близка к резонансу с переходом  $|g_1 g_2\rangle \rightarrow |e_1^{(+1)} g_2\rangle$ , – она оптимизирована с учетом поправок, связанных с диполь-дипольным взаимодействием и динамическим штарк-эффектом. Функция, описывающая изменение расстояния между уровнями в уравнениях (9), взята в виде

$$\epsilon(t) = -\Delta E_Z \left\{ 3 \left[ 1 - \left( \frac{t}{T} \right)^2 \right] - 2 \left[ 1 - \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right] \right\}, \quad (14)$$

чтобы избежать скачков производной на концах интервала  $(0, T)$  (см. рис. 1а). В расчете учитывались основное состояние и все 6 возбужденных уровней, использовались уравнения для элементов матрицы плотности, а значения параметров были взяты в соответствии со шкалой на рис. 3. Для простоты интерпретации конечного результата удобно работать в базисе состояний  $|\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle$ . В этом базисе верхнее состояние на рис. 1с, которое возбуждается лазерным

импульсом с круговой поляризацией, является суперпозицией

$$|\mathcal{P}\rangle = \sum b_{s,a}^{(M)} |\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle. \quad (15)$$

Энергии собственных состояний показаны на рис. 2b (штриховая кривая), а коэффициенты разложения  $b_{s,a}^{(M)}$  при заданных (см. рис. 3) соотношениях между  $E_Z$ ,  $U_r$  и  $\Delta E_Z$  приведены во второй строке табл. 1. Некоторые характеристики, относящиеся к базисным состояниям, обозначены в 1-й строке. В 3-й строке показаны значения диагональных элементов матрицы плотности в момент времени  $t = T$ , когда градиент магнитного поля становится равным нулю. Отсюда скорость распада возбуждаемого состояния составляет величину  $2\Gamma \sum_M |b_s^{(M)}|^2 \approx 0.5\Gamma$ .

Результат расчета состоит в следующем. Значения диагональных элементов матрицы плотности в момент времени  $t = T$  (когда градиент магнитного поля становится равным нулю) приведены в третьей строке табл. 1. Дальнейшая эволюция сводится к распаду симметричных компонент за время порядка  $(2\Gamma)^{-1}$ , а антисимметричные компоненты (суммарная доля которых составляет<sup>3)</sup> около 95%) распадаются при  $kr \ll 1$  значительно медленнее – со скоростью  $\approx \frac{1}{6}(kr)^2 \Gamma$  [15].

**Таблица 1.** Характеристики, коэффициенты и элементы матрицы

$ i\rangle$	$g_1 g_2$	$\mathcal{Q}_s^{(-1)}$	$\mathcal{Q}_s^{(0)}$	$\mathcal{Q}_s^{(+1)}$	$\mathcal{Q}_a^{(-1)}$	$\mathcal{Q}_a^{(0)}$	$\mathcal{Q}_a^{(+1)}$
$b_i$	–	–0.06	–0.12	–0.48	–0.16	–0.26	0.80
$\rho_{ii}$	0.054	$\sum_i \rho_{ii} \ll 10^{-2}$			0.031	0.087	0.824

Рассмотрим теперь конкретный пример – атом  $^{138}\text{Ba}$  с нулевым спином ядра и основным состоянием  $6^1S_0$  с угловым моментом  $J_g = 0$ . В качестве возбужденного состояния выбираем  $6^3P_1$  с угловым моментом  $J_e = 1$ . Скорость спонтанного радиационного перехода  $6^3P_1 \rightarrow 6^1S_0$  на длине волны  $\lambda_{eg} \approx 791$  нм составляет  $\Gamma \approx 7.4 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$  [17]. Соотношение между  $U_r$  и  $\Gamma$  на шкале рис. 3 задает расстояние между атомами  $r \approx 11.4$  нм в соответствии с формулой (4). Характеристики зеемановского расщепления должны в соответствии со шкалой на рис. 3 составлять величины  $E_Z \approx 2.3 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$  и  $\Delta E_Z \approx 2.3 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ . Учитывая фактор Ландэ  $g \approx 3/2$  для состояния  $6^3P_1$  и геометрию расположения атомов на рис. 1b, получаем следующие оценки для параметров магнитно-

<sup>3)</sup>Эта доля максимизирована варьированием в расчете амплитуды и частоты возбуждающего импульса (13).

го поля:  $\mathcal{H}_0 \approx 180$  Гс и  $d\mathcal{H}/dx \approx -1.9 \cdot 10^7$  Гс/см.<sup>4)</sup> Последняя цифра требует комментария: она велика, однако все еще на порядок меньше чем реально достигнутое значение градиента магнитного поля в микромасштабе [18]. Для полноты описания оценим также плотность энергии  $\Phi = (c/4\pi) \int \mathcal{E}^2(t) dt$  лазерного импульса, осуществляющего возбуждение системы. Выбрав электрическую составляющую лазерного импульса в форме (13), оптимизируя его амплитуду  $\mathcal{E}_0$  импульса соотношением

$$\hbar^{-1} \langle g_1 g_2 | \hat{d}^{(+)} | \mathcal{P} \rangle \int \mathcal{E}(t) dt \approx \pi \quad (16)$$

( $\pi$ -импульс с близким к единице поправочным коэффициентом) и подставляя  $b_s^{(+1)}$  из табл. 1 в формулу (15), получаем  $\Phi \approx 50$  нДж/см<sup>2</sup>.

Итак, в данной статье рассмотрен метод создания субизлучательного (запутанного) состояния в системе двух атомов, основанный на первоначальном лазерном возбуждении одного из атомов и дальнейшего контроля эволюции системы с помощью магнитного поля. Построен модельный пример, оптимизированный по спектроскопическим параметрам и используемым лазерному и магнитному полям. Показано, что при этом точность реализации субизлучательного состояния составляет  $\approx 95\%$ . Из нашего анализа следует, что наиболее критичным требованием к эксперименту является локализация атомов на расстоянии друг от друга порядка сотых долей длины волны используемого перехода. В этой связи можно отметить одно из последних оригинальных предложений в статье [19], основанное на высокочастотной модуляции оптического поля. В дополнение к лазерным пинцетам и ионным ловушкам, во введении к этой статье дан обзор и других вариантов *субволновой локализации*, рассматриваемых в литературе. Например, в качестве перспективного метода отмечено предложение использовать оптические решетки, основанные на многофотонных оптических переходах [20]. Мы можем отметить также идею фемтосекундной ловушки (см., например, [21]). Вся тема, как прелюдия к новой интересной физике, актуальна и безусловно будет развиваться. Решение задачи

субволновой локализации позволит реализовать метод, предложенный в данной статье.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант # 15-02-05657a).

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. И. В. Баграгин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
3. Z. Ficek and R. Tanaš, Phys. Rep. **372**, 369 (2002).
4. R. H. Lehberg, Phys. Rev. A **2**, 889 (1970).
5. P. W. Milloni and P. L. Knight, Phys. Rev. A **10**, 1096 (1974).
6. D.-W. Wang, Z.-H. Li, H. Zheng, and S.-Y. Zhu, Phys. Rev. A **81**, 043819 (2010).
7. А. А. Макаров, В. С. Летохов, ЖЭТФ **124**, 766 (2003).
8. E. S. Redchenko and V. I. Yudson, Phys. Rev. A **90**, 063829 (2014).
9. I. V. Bagratin, B. A. Grishanin, and V. N. Zadkov, Fortschr. Phys. **48**, 637 (2000).
10. M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **115**, 243602 (2015).
11. D. Pavolini, A. Crubellier, P. Pillet, L. Cabaret, and S. Liberman, Phys. Rev. Lett. **54**, 1917 (1985).
12. R. G. DeVoe and R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett. **76**, 2049 (1996).
13. W. Guerin, M. O. Araújo, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **116**, 083601 (2016).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, М. (1963), с. 119.
15. А. А. Макаров, Phys. Rev. A **92**, 053840 (2015).
16. P. Horwitz, Appl. Phys. Lett. **26**, 306 (1975).
17. N. D. Scielzo, J. R. Guest, E. C. Schulte, I. Ahmad, K. Bailey, D. L. Bowers, R. J. Holt, Z.-T. Lu, T. P. O'Connor, and D. H. Potterveld, Phys. Rev. A **73**, 010501 (2006).
18. H. J. Mamin, M. Poggio, C. L. Degen, and D. Rugar, Nature Nanotechnology **2**, 301 (2007).
19. S. Nascimbene, N. Goldman, N. R. Cooper, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **115**, 140401 (2015).
20. B. Dubetsky and P. R. Berman, Phys. Rev. A **66**, 045402 (2002).
21. D. N. Yanyshev, V. I. Balykin, Y. V. Vladimirova, and V. N. Zadkov, Phys. Rev. A **87**, 033411 (2013).

<sup>4)</sup> Возможно также использование градиента  $\mathcal{H}$  в продольном направлении. В этом случае приведенное значение должно быть умножено на  $\tan \alpha_0 = \sqrt{2}$ .